

CAPITOLO 4

Uno sguardo su un mondo complesso

1. Definizioni

Sia \mathbb{C} l'insieme dei numeri complessi. Un **numero complesso** $z = x + iy$ è identificato in maniera univoca assegnando due numeri reali x e y , detti rispettivamente **parte reale** $x = \Re(z)$ e **parte immaginaria** $y = \Im(z)$. la “quantità” i viene detta **unità immaginaria**. Dato $z = x + iy$ numero complesso, il suo **coniugato** \bar{z} è definito da $\bar{z} = x - iy$, e pertanto $\Re(\bar{z}) = \Re(z)$ e $\Im(\bar{z}) = -\Im(z)$. Se z_1 e z_2 sono due numeri complessi, la loro somma è definita componente per componente:

$$z_1 + z_2 = (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2),$$

mentre il prodotto è definito da

$$z_1 z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1).$$

Dalla definizione di prodotto si ricava subito che $i i = i^2 = -1$. Il **modulo** di un numero complesso è definito da $|z|^2 = z \bar{z}$. Eseguendo i conti, si trova

$$|z|^2 = x^2 + y^2.$$

Pertanto, $|z|^2$ è un numero reale, e quindi $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ (scegliendo la determinazione positiva per la radice quadrata). Si noti che il modulo del numero complesso z non è altro che la lunghezza euclidea del vettore $(x, y) = (\Re(z), \Im(z))$ di \mathbb{R}^2 . Pertanto, $d_{\mathbb{C}}(z, w) = |z - w|$ è una distanza su \mathbb{C} , che diventa così uno spazio metrico.

Lo spazio vettoriale \mathbb{C} si può rendere uno spazio dotato di prodotto scalare, definendo

$$(z | w) = z \bar{w}.$$

In questa maniera, si ottiene un'applicazione da $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$ in \mathbb{C} , che è bilineare, antisimmetrica, nel senso che

$$(z | w) = \overline{(w | z)},$$

è tale che $(z | z) \geq 0$, e verifica la disuguaglianza di Cauchy-Schwartz:

$$|(z | w)| \leq \sqrt{(z | z)} \sqrt{(w | w)}.$$

Dal momento che $\sqrt{(z | z)} = |z|$, ne segue che $(\cdot | \cdot)$ induce su \mathbb{C} la distanza $d_{\mathbb{C}}$.

Se $z \neq 0$, si può definire l'**inverso** di z come l'unico numero complesso w tale che $z w = 1$. Denotando $w = \frac{1}{z}$, si vede facilmente che

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}.$$

Così come si possono introdurre le coordinate polari in \mathbb{R}^2 , è possibile dare una rappresentazione in coordinate polari per i numeri complessi: ogni numero complesso è identificato da un coppia (ρ, θ) , con $\rho \geq 0$ e θ in \mathbb{R} . L'interpretazione geometrica è la solita: ρ è esattamente $|z|$, mentre θ è l'angolo formato con l'asse x dal vettore che unisce l'origine a z . Se, al solito, identifichiamo x e y — dati ρ e θ — dalle formule

$$\begin{cases} x = \rho \cos(\theta), \\ y = \rho \sin(\theta), \end{cases}$$

ne segue che $z = \rho(\cos(\theta) + i \sin(\theta))$. Dal momento che le funzioni seno e coseno sono periodiche, a θ e $\theta + 2k\pi$ (k intero relativo) corrisponde lo stesso numero complesso z . In altre parole, se $z \neq 0$, l'argomento è determinato a meno di multipli interi di 2π . Definiamo $\text{Arg}(z)$ uno qualsiasi dei valori di θ per i quali $z = \rho(\cos(\theta) + i \sin(\theta))$, mentre definiamo $\arg(z)$ l'unico valore di θ compreso tra φ_0 e $\varphi_0 + 2\pi$, con φ_0 fissato *a priori* nel contesto; nella maggior parte dei casi si sceglierà $\varphi_0 = 0$, oppure $\varphi_0 = -\pi$. Se $z = 0$, dal momento che $\rho = 0$, $\arg(z)$ e $\text{Arg}(z)$ non sono definiti.

Se θ è in \mathbb{R} definiamo $e^{i\theta}$ come il numero complesso $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i \sin(\theta)$. In questo modo, $|e^{i\theta}| = 1$ e, se $\rho = |z|$ e $\theta = \text{Arg}(z)$,

$$z = \rho e^{i\theta}.$$

Dati $e^{i\theta_1}$ e $e^{i\theta_2}$ in \mathbb{C} , si ha poi

$$\begin{aligned} e^{i\theta_1} e^{i\theta_2} &= [\cos(\theta_1) + i \sin(\theta_1)] [\cos(\theta_2) + i \sin(\theta_2)] \\ &= [\cos(\theta_1) \cos(\theta_2) - \sin(\theta_1) \sin(\theta_2)] \\ &\quad + i [\sin(\theta_1) \cos(\theta_2) + \cos(\theta_1) \sin(\theta_2)] \\ &= [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)] \\ &= e^{i(\theta_1 + \theta_2)}. \end{aligned}$$

Pertanto, la funzione $\theta \mapsto e^{i\theta}$ segue le consuete regole degli esponenziali. Dalla formula appena dimostrata segue facilmente che se z_1 e z_2 sono due numeri complessi,

allora $|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$ e $\text{Arg}(z_1 z_2) = \text{Arg}(z_1) + \text{Arg}(z_2)$. Si ha poi

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{\rho e^{i\theta}} = \frac{\overline{\rho e^{i\theta}}}{|\rho e^{i\theta}|^2} = \frac{e^{-i\theta}}{\rho},$$

e pertanto $|\frac{1}{z}| = \frac{1}{|z|}$ e $\arg(\frac{1}{z}) = -\arg(z)$. Come conseguenza, se z_1 e z_2 sono due numeri complessi con $z_2 \neq 0$,

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} e^{i(\arg(z_1) - \arg(z_2))}.$$

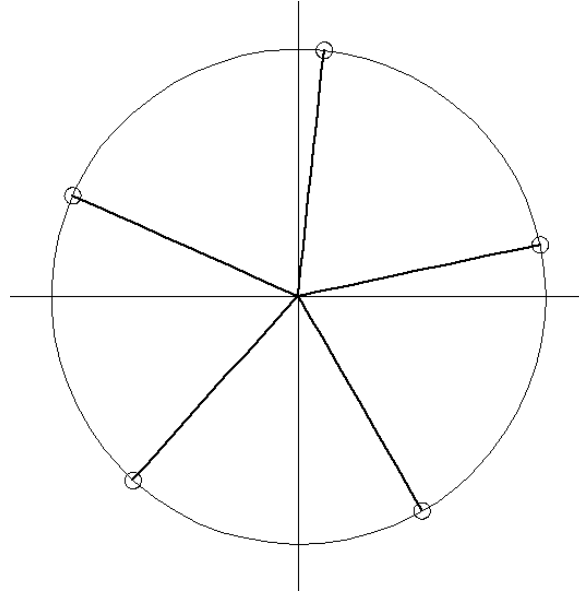
Dalle formule appena dimostrate segue poi che, se z è un numero complesso, e n è un intero relativo (se n è negativo, z deve essere diverso da zero), allora

$$z^n = (\rho e^{i\theta})^n = \rho^n e^{in\theta}.$$

Da questa formula si ottiene formula che dà le radici n -sime di un numero complesso z . Infatti, se $z = \rho e^{i\theta}$, allora

$$\sqrt[n]{z} = \left\{ \sqrt[n]{\rho} e^{i\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)}, k = 0, \dots, n-1 \right\}.$$

Geometricamente, le radici n -sime di z sono i vertici di un poligono regolare di n lati inscritto nella circonferenza di centro l'origine e raggio $\sqrt[n]{\rho}$.



Le cinque radici quinte di $e^{i\frac{\pi}{3}}$

2. Convergenza e continuità

Essendo $(\mathbb{C}, d_{\mathbb{C}})$ uno spazio metrico, \mathbb{C} è uno spazio topologico. Dal momento che l'applicazione $I : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}^2$ definita da $I(z) = (\Re(z), \Im(z))$ è un'isometria (se in \mathbb{R}^2 si considera la distanza euclidea), tutte le proprietà topologiche di \mathbb{R}^2 si trasferiscono

automaticamente su \mathbb{C} . In altre parole, gli aperti di \mathbb{C} non sono altro che gli aperti di \mathbb{R}^2 , e lo stesso vale per gli insiemi chiusi, i compatti, i connessi, la chiusura e l'interno di un insieme.

La definizione di convergenza per una successione $\{z_n\}$ contenuta in \mathbb{C} è la solita: z_n converge a z_0 se e solo se $d_{\mathbb{C}}(z_n, z_0) = |z_n - z_0|$ tende a zero. Ricordando la definizione di modulo (e l'isometria tra \mathbb{C} e \mathbb{R}^2),

$$z_n \rightarrow z_0 \iff \begin{cases} \Re(z_n) \rightarrow \Re(z_0) \\ \Im(z_n) \rightarrow \Im(z_0) \end{cases}.$$

In altre parole, la convergenza di successioni può essere “letta” in \mathbb{R}^2 e dimostrata componente per componente.

Un sottoinsieme E di \mathbb{C} si dice un **dominio** se E è un aperto connesso. Sia E un dominio e $f : E \rightarrow \mathbb{C}$ una funzione; assegnare una funzione da E in \mathbb{C} è equivalente ad assegnare due funzioni da E a valori in \mathbb{R} . In altre parole, se $z = x + iy$, allora $f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$, con $u(x, y) = \Re(f(z))$ e $v(x, y) = \Im(f(z))$.

Una funzione $f : E \rightarrow \mathbb{C}$ ammette limite L per z tendente a z_0 se e solo se $f(z_n)$ converge a L per ogni successione $\{z_n\}$ contenuta in E e tendente a z_0 . In termini di parte reale e immaginaria, $f(z)$ tende a L per z tendente a z_0 se e solo se $u(x_n, y_n)$ converge a $\Re(L)$ e $v(x_n, y_n)$ converge a $\Im(L)$. Una funzione $f : E \rightarrow \mathbb{C}$ si dice **continua** in z_0 se e solo se $f(z)$ converge a $f(z_0)$ quando z tende a z_0 . A causa dell'identificazione tra convergenza di $f(z)$ e convergenza della parte reale e della parte immaginaria, f è continua in z_0 se e solo se u e v sono continue in $(x_0, y_0) = (\Re(z_0), \Im(z_0))$. In altre parole, saper determinare la continuità di funzioni definite da \mathbb{R}^2 in \mathbb{R} è sufficiente (ed anche necessario...) per determinare la continuità di funzione definite da \mathbb{C} a valori complessi.

Dal momento che la continuità di una funzione complessa f si “legge” dalla continuità delle funzioni u e v , si estendono a funzioni a valori complessi tutti i teoremi validi per funzioni continue da \mathbb{R}^2 in \mathbb{R} . In particolare, se E è un compatto di \mathbb{C} , e $f : E \rightarrow \mathbb{C}$ è una funzione continua, allora $|f(z)|$ è una funzione continua da E in \mathbb{R} (perché è composizione di funzioni continue) e pertanto ammette massimo e minimo per il teorema di Weierstrass.

DEFINIZIONE 2.1. Sia E un dominio in \mathbb{C} , e sia $f : E \rightarrow \mathbb{C}$ una funzione. Dato z_0 in E , f si dice **derivabile** in z_0 se e solo se esiste

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}.$$

Se f è derivabile in z_0 , si definisce $f'(z_0)$ il valore del limite:

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}.$$

OSSERVAZIONE 2.2. Ricordiamo che $\Delta z \rightarrow 0$ vuol dire “per ogni successione z_n tendente a zero”; in altre parole, Δz può tendere a zero in un modo qualsiasi, senza “regole” prefissate. Se scriviamo $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$, allora $\Delta z \rightarrow 0$ è equivalente a $(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0, 0)$, cosicché il limite che definisce la derivabilità di una funzione complessa è, in un certo senso, un limite in due variabili.

ESEMPIO 2.3. Sia $f(z) = L$, con L numero complesso fissato. Allora, per ogni z_0 ,

$$\frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} = \frac{L - L}{\Delta z} = 0,$$

e quindi $f(z) = L$ è derivabile ovunque e la sua derivata vale 0. Sia $f(z) = z$, e sia z_0 qualsiasi. Allora

$$\frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} = \frac{z_0 + \Delta z - z_0}{\Delta z} = 1,$$

e pertanto $f(z) = z$ è derivabile in ogni punto del piano complesso e la sua derivata vale 1. Sia ora n in \mathbb{N} e $f(z) = z^n$. Allora, per la formula del binomio di Newton,

$$\frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} = \frac{(z_0 + \Delta z)^n - (z_0)^n}{\Delta z} = \frac{\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} z_0^k (\Delta z)^{n-k}}{\Delta z},$$

che converge a $n z_0^{n-1}$. La funzione $f(z) = z^n$ è pertanto derivabile su tutto il piano complesso, e la sua derivata vale $n z^{n-1}$ (ritrovando così la formula che dà la derivata (reale) di x^n). Se n è un intero negativo, la funzione $f(z) = z^n$ è derivabile in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, e la sua derivata vale $n z^{n-1}$ (come si verifica facilmente).

Sia ora $f(z) = \Re(z)$; si ha

$$\frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} = \frac{\Re(z_0) + \Re(\Delta z) - \Re(z_0)}{\Re(\Delta z) + i\Im(\Delta z)} = \frac{\Delta x}{\Delta x + i\Delta y}.$$

Se facciamo tendere Δz a zero scegliendo $(\Delta x, \Delta y) = (t, 0)$ (con t tendente a zero), otteniamo come limite 1. Se, invece, facciamo tendere Δz a zero scegliendo $(\Delta x, \Delta y) = (0, t)$ (con t tendente a zero), otteniamo come limite 0. Pertanto, $f(z) = \Re(z)$ non è derivabile in nessun punto di \mathbb{C} . Se calcoliamo la parte reale e la parte immaginaria di $\Re(z)$, si ha $u(x, y) = x$ e $v(x, y) = 0$, che sono due funzioni C^∞ su \mathbb{R}^2 . In altre parole, e a differenza di quanto accade per la continuità, la derivabilità in \mathbb{C} **non** è equivalente alla derivabilità di parte reale e parte immaginaria, e neanche a regolarità superiori di u e v . In maniera analoga, si dimostra che $f(z) = \Im(z)$ e $f(z) = \bar{z}$ non sono derivabili in nessun punto di \mathbb{C} .

TEOREMA 2.4. Sia $f : E \rightarrow \mathbb{C}$ una funzione e sia z_0 in E . Se f è derivabile in z_0 , allora f è **differenziabile** in z_0 , ovvero

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0) - f'(z_0) \Delta z}{\Delta z} = 0.$$

Dimostrazione. Evidente dalla definizione di derivabilità. ■

La derivabilità di u e v non è sufficiente a garantire la derivabilità di f perché la parte reale e la parte immaginaria di una funzione derivabile in \mathbb{C} devono soddisfare delle relazioni ben precise.

TEOREMA 2.5. Sia $f : E \rightarrow \mathbb{C}$ una funzione derivabile in z_0 appartenente ad E . Allora la parte reale u e la parte immaginaria v di f sono differenziabili in $z_0 = (x_0, y_0)$ e si ha

$$(2.1) \quad \begin{cases} u_x(x_0, y_0) = v_y(x_0, y_0), \\ u_y(x_0, y_0) = -v_x(x_0, y_0). \end{cases}$$

Le equazioni (2.1) sono dette **equazioni di Cauchy-Riemann**.

Dimostrazione. Si ha

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}.$$

Scegliamo ora $\Delta z = (\Delta x, 0)$, cosicché

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x_0 + \Delta x, y_0) - u(x_0, y_0) + i[v(x_0 + \Delta x, y_0) - v(x_0, y_0)]}{\Delta x}.$$

Dal momento che il limite esiste, la parte reale converge alla parte reale del limite, e la parte immaginaria converge alla parte immaginaria. Pertanto, se $f'(z_0) = a + ib$, allora

$$\begin{aligned} u_x(x_0, y_0) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x_0 + \Delta x, y_0) - u(x_0, y_0)}{\Delta x} = a, \\ v_x(x_0, y_0) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{v(x_0 + \Delta x, y_0) - v(x_0, y_0)}{\Delta x} = b. \end{aligned}$$

Scegliamo ora $\Delta z = (0, \Delta y)$; si ha

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{u(x_0, y_0 + \Delta y) - u(x_0, y_0) + i[v(x_0, y_0 + \Delta y) - v(x_0, y_0)]}{i \Delta y} \\ &= \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{v(x_0, y_0 + \Delta y) - v(x_0, y_0) - i[u(x_0, y_0 + \Delta y) - u(x_0, y_0)]}{\Delta y}. \end{aligned}$$

Analogamente a prima, si trova

$$\begin{aligned} v_y(x_0, y_0) &= \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{v(x_0, y_0 + \Delta y) - v(x_0, y_0)}{\Delta y} = a, \\ -u_y(x_0, y_0) &= - \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{u(x_0, y_0 + \Delta y) - u(x_0, y_0)}{\Delta y} = b, \end{aligned}$$

cosicché u e v sono derivabili in (x_0, y_0) e soddisfano le equazioni di Cauchy-Riemann.

Verifichiamo ora che u e v sono differenziabili: dobbiamo dimostrare che, quando $(\Delta x, \Delta y)$ tende a $(0, 0)$,

$$\begin{aligned} \frac{u(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - u(x_0, y_0) - u_x(x_0, y_0)\Delta x - u_y(x_0, y_0)\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} &\rightarrow 0, \\ \frac{v(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - v(x_0, y_0) - v_x(x_0, y_0)\Delta x - v_y(x_0, y_0)\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} &\rightarrow 0. \end{aligned}$$

Essendo f differenziabile in z_0 , quando Δz tende a zero si ha

$$(2.2) \quad \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0) - f'(z_0)\Delta z}{\Delta z} \rightarrow 0.$$

Scriviamo ora parte reale e parte immaginaria del numeratore; essendo $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$, ed essendo $f'(z_0) = u_x(x_0, y_0) + iv_x(x_0, y_0)$, si ha che la parte reale è

$$\Delta u = u(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - u(x_0, y_0) - u_x(x_0, y_0)\Delta x + v_x(x_0, y_0)\Delta y,$$

che, per le (2.1), diventa

$$\Delta u = u(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - u(x_0, y_0) - u_x(x_0, y_0)\Delta x - u_y(x_0, y_0)\Delta y,$$

mentre la parte immaginaria è

$$\Delta v = v(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - v(x_0, y_0) - v_x(x_0, y_0)\Delta x - u_x(x_0, y_0)\Delta y,$$

che, sempre per le (2.1), si riscrive

$$\Delta v = v(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - v(x_0, y_0) - v_x(x_0, y_0)\Delta x - v_y(x_0, y_0)\Delta y.$$

Pertanto, la (2.2) afferma che

$$\frac{\Delta u + i\Delta v}{\Delta z} \rightarrow 0,$$

ovvero che

$$\frac{|\Delta u + i\Delta v|}{|\Delta z|} \rightarrow 0,$$

quando Δz tende a zero; dal momento che tale limite è zero se e solo se

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{|\Delta u|}{|\Delta z|} = 0, \quad \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{|\Delta v|}{|\Delta z|} = 0,$$

ricordando che $|\Delta z| = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$, si ha che u e v sono differenziabili in z_0 . ■

È anche vero il viceversa del teorema precedente.

TEOREMA 2.6. *Sia $f : E \rightarrow \mathbb{C}$ un funzione, con $f = u + iv$, e sia z_0 in E . Se u e v sono differenziabili in z_0 e verificano le (2.1), allora f è derivabile in z_0 .*

Dimostrazione. Essendo u e v differenziabili in z_0 , si ha

$$u(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - u(x_0, y_0) = u_x(x_0, y_0)\Delta x + u_y(x_0, y_0)\Delta y + \xi(\Delta x, \Delta y),$$

e

$$v(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - v(x_0, y_0) = v_x(x_0, y_0)\Delta x + v_y(x_0, y_0)\Delta y + \eta(\Delta x, \Delta y),$$

con $\xi(\Delta x, \Delta y)$ e $\eta(\Delta x, \Delta y)$ tali che

$$(2.3) \quad \lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0,0)} \frac{\xi(\Delta x, \Delta y)}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\xi(\Delta z)}{|\Delta z|} = 0,$$

e

$$(2.4) \quad \lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0,0)} \frac{\eta(\Delta x, \Delta y)}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\eta(\Delta z)}{|\Delta z|} = 0.$$

Sfruttando le (2.1), si ha

$$u(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - u(x_0, y_0) = u_x(x_0, y_0)\Delta x - v_x(x_0, y_0)\Delta y + \xi(\Delta x, \Delta y),$$

e

$$v(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - v(x_0, y_0) = v_x(x_0, y_0)\Delta x + u_x(x_0, y_0)\Delta y + \eta(\Delta x, \Delta y).$$

Pertanto,

$$\begin{aligned} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} &= \frac{u_x(x_0, y_0)[\Delta x + i\Delta y] + i v_x(x_0, y_0)[\Delta x + i\Delta y]}{\Delta x + i\Delta y} \\ &\quad + \frac{\xi(\Delta z) + i\eta(\Delta z)}{\Delta z} \\ &= u_x(x_0, y_0) + i v_x(x_0, y_0) + \frac{\xi(\Delta z) + i\eta(\Delta z)}{\Delta z}. \end{aligned}$$

Da (2.3) e (2.4) segue allora la tesi. ■

OSSERVAZIONE 2.7. In virtù delle equazioni di Cauchy-Riemann, se f è derivabile in z_0 allora si ha

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= u_x(x_0, y_0) + i v_x(x_0, y_0) = u_x(x_0, y_0) - i u_y(x_0, y_0) \\ &= v_y(x_0, y_0) + i v_x(x_0, y_0) = v_y(x_0, y_0) - i u_y(x_0, y_0). \end{aligned}$$

OSSERVAZIONE 2.8. La scrittura $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ non è l'unica possibile per una funzione a valori complessi. Infatti, possiamo rappresentare z in forma polare come $z = \rho e^{i\theta}$, e pertanto possiamo scrivere $f(z) = u(\rho, \theta) + iv(\rho, \theta)$. La condizione di derivabilità diviene allora

$$\frac{u(\rho_0 + \Delta\rho, \theta_0 + \Delta\theta) - u(\rho_0, \theta_0) + i[v(\rho_0 + \Delta\rho, \theta_0 + \Delta\theta) - v(\rho_0, \theta_0)]}{(\rho_0 + \Delta\rho) e^{i(\theta_0 + \Delta\theta)} - \rho_0 e^{i\theta_0}} \rightarrow 0,$$

quando $(\Delta\rho, \Delta\theta)$ tende a $(0, 0)$. Separando parte reale e parte immaginaria segue che (se $\rho_0 \neq 0$), le derivate parziali di u e v sono legate dalle equazioni

$$(2.5) \quad u_\rho(\rho_0, \theta_0) = \frac{1}{\rho_0} v_\theta(\rho_0, \theta_0), \quad u_\theta(\rho_0, \theta_0) = -\frac{1}{\rho_0} v_\rho(\rho_0, \theta_0).$$

Se, analogamente, scriviamo $f(z) = \rho(x, y) e^{i\theta(x, y)}$, allora le equazioni soddisfatte dalle derivate parziali di $\rho(x, y)$ e $\theta(x, y)$ sono

$$(2.6) \quad \rho_x(x_0, y_0) = \rho(x_0, y_0) \theta_y(x_0, y_0), \quad \rho_y(x_0, y_0) = -\rho(x_0, y_0) \theta_x(x_0, y_0).$$

DEFINIZIONE 2.9. Una funzione $f : E \rightarrow \mathbb{C}$ si dice **olomorfa in E** se f è derivabile in z per ogni z in E , e se la funzione $f'(z)$ è continua in E .

Per i teoremi precedentemente dimostrati, f è olomorfa in E se e solo se u e v sono due funzioni in $C^1(E)$ che verificano le equazioni di Cauchy-Riemann in E .

ESEMPIO 2.10. Siano $u(x, y) = e^x \cos(y)$ e $v(x, y) = e^x \sin(y)$. Le funzioni u e v sono $C^1(\mathbb{R}^2)$ e, come si verifica facilmente, soddisfano le equazioni di Cauchy-Riemann. Definiamo l'esponenziale complesso e^z come la funzione olomorfa f che ha u e v come parte reale e parte immaginaria:

$$e^z = e^x [\cos(y) + i \sin(y)] = e^x e^{iy}.$$

La funzione e^z estende al campo complesso la funzione e^x definita su \mathbb{R} . Si osservi che, essendo

$$e^{iy} = e^{i(y+2\pi)},$$

la funzione e^z è periodica di periodo (complesso) $2\pi i$; inoltre,

$$(e^z)' = e^z,$$

come si verifica facilmente. A partire da e^z definiamo altre due funzioni olomorfe su tutto \mathbb{C} :

$$\cos(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \sin(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}.$$

Si vede facilmente che $\cos(z)$ e $\sin(z)$ estendono al campo complesso le funzioni reali di variabile reale $\cos(x)$ e $\sin(x)$; inoltre, $\cos(z)$ e $\sin(z)$ sono periodiche di periodo 2π , e sono tali che $(\cos(z))' = -\sin(z)$ e $(\sin(z))' = \cos(z)$. Tali proprietà

giustificano il nome attribuito alle due funzioni, così come lo giustifica il fatto (di verifica immediata) che

$$[\operatorname{sen}(z)]^2 + [\cos(z)]^2 = 1, \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Si noti che la proprietà precedente **non** implica $|\operatorname{sen}(z)| \leq 1$ e $|\cos(z)| \leq 1$.

TEOREMA 2.11. *Siano $f, g : E \rightarrow \mathbb{C}$ due funzioni olomorfe in E ; allora*

- 1) $\lambda f + \mu g$ è una funzione olomorfa in E per ogni λ, μ in \mathbb{C} ;
- 2) $f g$ è una funzione olomorfa in E ;
- 3) se $g(z) \neq 0$ in E , allora $\frac{f(z)}{g(z)}$ è una funzione olomorfa in E ;
- 4) se $\varphi : f(E) \rightarrow \mathbb{C}$ è una funzione olomorfa, allora $h(z) = \varphi(f(z))$ è olomorfa in E , e si ha $h'(z) = \varphi'(f(z)) f'(z)$;
- 5) se $f'(z_0) \neq 0$, allora f è invertibile in un intorno di $w_0 = f(z_0)$; detta g la funzione inversa, g è olomorfa e si ha $g'(w_0) = \frac{1}{f'(z_0)}$;
- 6) data $u = \Re(f)$, la funzione $v = \Im(f)$ è determinata univocamente a meno di una costante;
- 7) le curve di livello $u(x, y) = c_1$ e $v(x, y) = c_2$ sono (al variare di c_1 e c_2 in \mathbb{R}) due famiglie di curve ortogonali.

Dimostrazione. Le prime quattro proprietà hanno dimostrazione analoga alle corrispondenti proprietà delle funzioni C^1 di variabile reale. Per la 5), si osservi che l'invertibilità locale è equivalente a dimostrare che, localmente, le funzioni $u(x, y)$ e $v(x, y)$ sono invertibili. Una condizione sufficiente è che sia diverso da zero il determinante

$$\begin{vmatrix} u_x(x_0, y_0) & u_y(x_0, y_0) \\ v_x(x_0, y_0) & v_y(x_0, y_0) \end{vmatrix} = u_x(x_0, y_0) v_y(x_0, y_0) - u_y(x_0, y_0) v_x(x_0, y_0).$$

Per le equazioni di Cauchy-Riemann, si ha che

$$u_x(x_0, y_0) v_y(x_0, y_0) - u_y(x_0, y_0) v_x(x_0, y_0) = u_x^2(x_0, y_0) + v_x^2(x_0, y_0) = |f'(z_0)|^2,$$

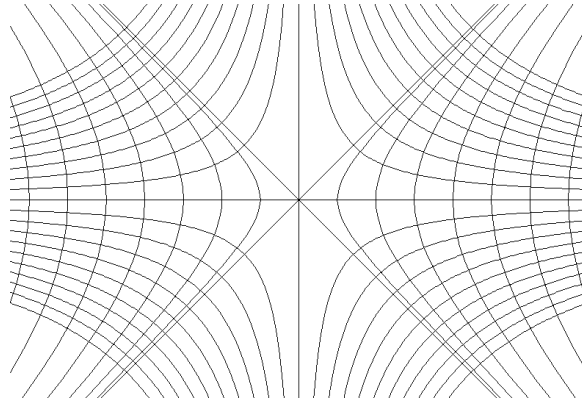
e quindi f è localmente invertibile. La formula per la derivata di g si ottiene usando 4) e derivando $g(f(z)) = z$. Per le equazioni di Cauchy-Riemann, una volta assegnata u parte reale di una funzione olomorfa f , automaticamente sono assegnate le derivate v_x e v_y della parte immaginaria di f , ovvero il gradiente di v . Essendo E connesso, ciò equivale ad assegnare v a meno di una costante; abbiamo così dimostrato 6). Infine, dal momento che $\nabla u = (u_x, u_y)$ e $\nabla v = (v_x, v_y)$ sono due vettori paralleli alle normali alle curve di livello, se (x_0, y_0) appartiene alle curve $u(x, y) = c_1$ e $v(x, y) = c_2$, si ha,

per le equazioni di Cauchy-Riemann,

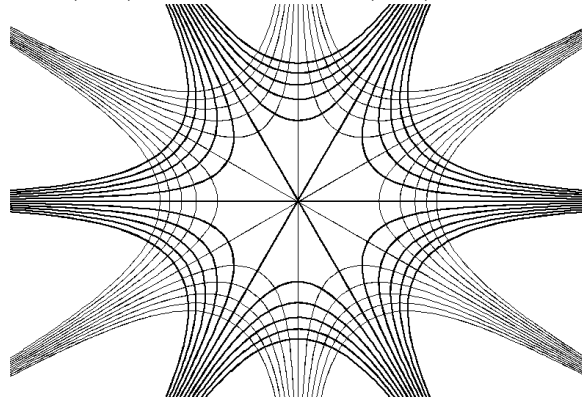
$$(\nabla u(x_0, y_0) \mid \nabla v(x_0, y_0)) = u_x(x_0, y_0) u_y(x_0, y_0) - u_y(x_0, y_0) u_x(x_0, y_0) = 0.$$

Le curve di livello hanno pertanto normali ortogonali e quindi, essendo curve contenute in \mathbb{R}^2 , tangenti ortogonali. ■

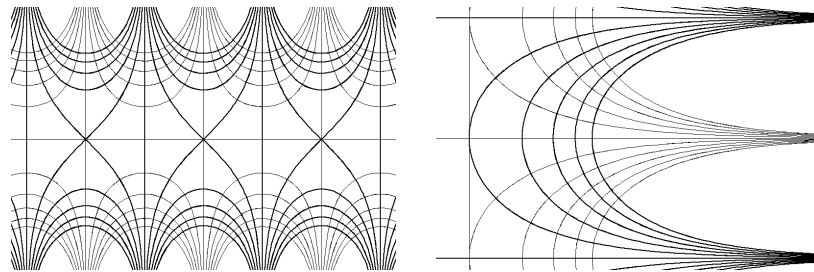
ESEMPIO 2.12. Se $f(z) = z^2$, allora $u(x, y) = x^2 - y^2$ e $v(x, y) = 2xy$.



Se $f(z) = z^3$, allora $u(x, y) = x^3 - 3xy^2$ e $v(x, y) = 3x^2y - y^3$.



Qui sotto, le curve di livello di e^z e $\cos(z)$.



OSSERVAZIONE 2.13. Un'altra importante proprietà delle funzioni olomorfe è la seguente. Sia $w = f(z)$ una funzione olomorfa da E in \mathbb{C} , e sia z_0 in E tale che

$f'(z_0) \neq 0$. Sia γ_1 una curva regolare passante per z_0 (ovvero $\gamma_1(t) = (x_1(t), y_1(t))$), con x_1 e y_1 di classe $C^1([-1, 1])$ e tali che $(x_1(0), y_1(0)) = (x_0, y_0)$. Allora $\Gamma_1(t) = f(\gamma_1(t))$ è una curva regolare passante per $w_0 = f(z_0)$: la regolarità di Γ_1 segue osservando che $\Gamma_1(t) = (u(x_1(t), y_1(t)), v(x_1(t), y_1(t)))$, dove u e v sono la parte reale e la parte immaginaria di f . Sia $f'(z_0) = R_0 e^{i\theta_0}$, con $R_0 \neq 0$ e $0 \leq \theta_0 < 2\pi$. Se ora ci muoviamo sulla curva γ_1 tendendo a z_0 , il punto $f(\gamma_1(t))$ si muove su Γ_1 e tende a w_0 ; essendo per definizione

$$R_0 e^{i\theta_0} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z},$$

ottenuto indipendentemente da come Δz tende a zero, si ottiene lo stesso limite prendendo $\Delta z = \gamma_1(t) - z_0$ e facendo tendere t a zero; in questa maniera, $f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)$ è proprio $\Gamma_1(t) - w_0$. Diamo ora un'interpretazione geometrica di $\gamma_1(t) - z_0$ e di $\Gamma_1(t) - w_0$; scrivendoli in coordinate polari, si ha

$$\gamma_1(t) - z_0 = r(t) e^{i\varphi(t)}, \quad \Gamma_1(t) - w_0 = R(t) e^{i\Phi(t)},$$

e quindi

$$R_0 e^{i\theta_0} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{R(t) e^{i\Phi(t)}}{r(t) e^{i\varphi(t)}} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{R(t)}{r(t)} e^{i(\Phi(t) - \varphi(t))}.$$

In particolare,

$$R_0 = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{R(t)}{r(t)}, \quad \theta_0 = \lim_{t \rightarrow 0} [\Phi(t) - \varphi(t)].$$

Geometricamente, $\Phi(t)$ è l'angolo formato con l'asse x (del piano w) dalla secante alla curva Γ_1 nel punto $\Gamma_1(t)$ rispetto a w_0 , mentre $\varphi(t)$ è l'angolo formato con l'asse x (del piano z) dalla secante alla curva γ_1 nel punto $\gamma_1(t)$ rispetto a z_0 ; quando t tende a zero, questi angoli tendono rispettivamente all'angolo Φ_0 formato con l'asse x (del piano w) dalla tangente in w_0 a Γ_1 ed all'angolo φ_0 formato con l'asse x (del piano z) dalla tangente in z_0 a γ_1 . Pertanto,

$$\theta_0 = \Phi_0 - \varphi_0.$$

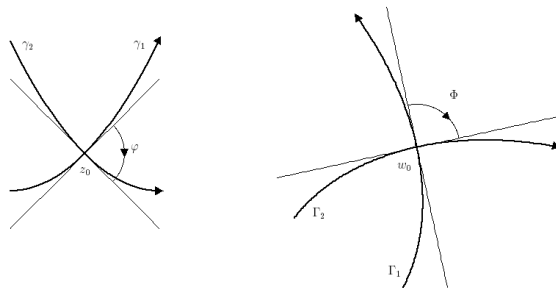
Sia ora γ_2 un'altra curva regolare passante per z_0 e sia Γ_2 l'immagine di γ_2 tramite f . Ripetendo lo stesso ragionamento, si trova

$$\theta_0 = \Psi_0 - \psi_0,$$

dove Ψ_0 e ψ_0 sono rispettivamente l'angolo formato con l'asse x (del piano w) dalla tangente in w_0 a Γ_2 e l'angolo formato con l'asse x (del piano z) dalla tangente in z_0 a γ_2 . Essendo θ_0 indipendente dalle curva, si ha $\Phi_0 - \varphi_0 = \Psi_0 - \psi_0$, ovvero

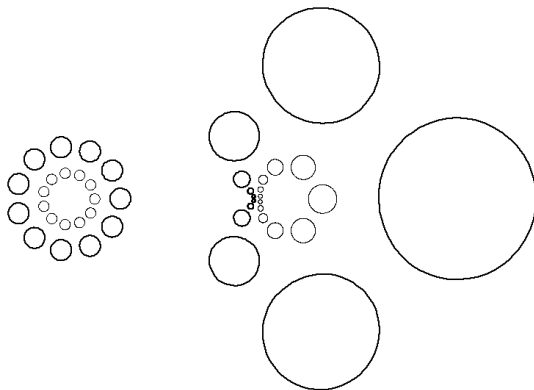
$$\Phi = \Phi_0 - \Psi_0 = \varphi_0 - \psi_0 = \varphi.$$

Dal momento che Φ e φ sono rispettivamente l'angolo tra Γ_1 e Γ_2 e tra γ_1 e γ_2 , ne segue che *una funzione olomorfa conserva gli angoli*.



La proprietà di conservare gli angoli di una funzione olomorfa

Infine, dal momento che $R(t)$ è la lunghezza della secante alla curva Γ_1 nel punto $\Gamma_1(t)$ rispetto a w_0 , e che $r(t)$ è la lunghezza della secante alla curva γ_1 nel punto $\gamma_1(t)$, il rapporto $\frac{R(t)}{r(t)}$ misura quanto f “distorce” le lunghezze nella direzione data da γ_1 . Facendo tendere t a zero, il rapporto $\frac{R(t)}{r(t)}$ tende a R_0 , che rappresenta quindi la distorsione infinitesima data da f nella direzione della tangente a γ_1 in z_0 . Dal momento che il valore R_0 non dipende da γ_1 (ovvero, non dipende dalla tangente a γ_1 in z_0), ne segue che *una funzione olomorfa distorce il piano complesso uniformemente in tutte le direzioni* (in maniera infinitesima). In altre parole, trasforma (localmente) cerchi in cerchi; il rapporto tra il raggio del cerchio di partenza e quello di arrivo è dato da $R_0 = |f'(z_0)|$.



Localmente i cerchi hanno come immagine dei cerchi

Un funzione da \mathbb{C} in \mathbb{C} che conservi gli angoli e che distorca uniformemente in tutte le direzioni si dice **funzione conforme**.

3. Integrali curvilinei

DEFINIZIONE 3.1. Una **curva regolare** a valori complessi è un'applicazione $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ definita da $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$, con $x, y : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ due funzioni $C^1([a, b])$ con la proprietà che $(x'(t), y'(t)) \neq (0, 0)$ per ogni t in $[a, b]$. Una **curva regolare a tratti** è un'applicazione $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ continua tale che esiste una partizione $a = a_0 < a_1 < \dots < a_{n-1} < a_n = b$ di $[a, b]$ tale che γ è regolare se ristretta a (a_{i-1}, a_i) (con i da 1 a n). Una curva regolare a tratti si dice **semplice** se $\gamma(t_1) \neq \gamma(t_2)$ per ogni t_1 e t_2 in (a, b) . Una curva regolare a tratti si dice **chiusa** se $\gamma(a) = \gamma(b)$.

Sia ora E un dominio di \mathbb{C} , $f : E \rightarrow \mathbb{C}$ una funzione continua, e $\gamma : [a, b] \rightarrow E$ una curva regolare. Definiamo l'**integrale curvilineo** di f lungo γ come l'integrale (secondo Riemann)

$$\int_{\gamma} f(z) = \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt.$$

L'integrale appena scritto va inteso in senso complesso: se $f(\gamma(t)) \gamma'(t) = \alpha(t) + i\beta(t)$, allora

$$\int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) = \int_a^b \alpha(t) dt + i \int_a^b \beta(t) dt.$$

La definizione di integrale curvilineo viene estesa in maniera naturale dalle curve regolari alle curve regolari a tratti come somma degli integrali di f lungo le n curve regolari che compongono γ .

Supponiamo ora che $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ e che $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$. Allora, sviluppando il prodotto,

$$\begin{aligned} f(\gamma(t)) \gamma'(t) &= [u(x(t), y(t)) + i v(x(t), y(t))] [x'(t) + iy'(t)] \\ &= u(x(t), y(t)) x'(t) - v(x(t), y(t)) y'(t) \\ &\quad + i[v(x(t), y(t)) x'(t) + u(x(t), y(t)) y'(t)]. \end{aligned}$$

Definiamo ora due forme differenziali continue su E :

$$\omega_1(x, y) = u(x, y) dx - v(x, y) dy, \quad \omega_2(x, y) = v(x, y) dx + u(x, y) dy.$$

È allora evidente dal calcolo appena effettuato, e dalla definizione di integrale di una forma differenziale lungo una curva, che si ha

$$\int_{\gamma} f(z) = \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt = \int_{\gamma} \omega_1 + i \int_{\gamma} \omega_2 = \int_{\gamma} [\omega_1 + i \omega_2],$$

cosicché il calcolo dell'integrale curvilineo di una funzione continua da \mathbb{C} in \mathbb{C} viene ricondotto al calcolo dell'integrale lungo una curva di due forme differenziali. In

questa maniera, l'integrale curvilineo eredita tutte le proprietà dell'integrale di una forma differenziale, che sono riassunte nel seguente teorema.

TEOREMA 3.2. *Siano γ_1 e γ_2 due curve regolari a valori in E , e siano $f_1, f_2 : E \rightarrow \mathbb{C}$ continue.*

- 1) *se $\gamma_1 = -\gamma_2$ (ovvero è la curva con lo stesso sostegno, la stessa parametrizzazione, ma verso di percorrenza opposto), allora*

$$\int_{\gamma_1} f_1(z) = - \int_{\gamma_2} f_1(z);$$

- 2) *si ha*

$$\int_{\gamma_1 \cup \gamma_2} f_1(z) = \int_{\gamma_1} f_1(z) + \int_{\gamma_2} f_1(z);$$

- 3) *per ogni coppia di numeri complessi λ e μ ,*

$$\int_{\gamma_1} [\lambda f_1(z) + \mu f_2(z)] = \lambda \int_{\gamma_1} f_1(z) + \mu \int_{\gamma_1} f_2(z);$$

- 4) *si ha*

$$\left| \int_{\gamma_1} f(z) \right| \leq \int_{\gamma_1} |f(z)| ds_{\gamma_1},$$

dove con ds_{γ_1} si è indicata l'ascissa curvilinea su γ_1 .

- 5) *e $\varphi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ è una funzione olomorfa tale che $\gamma_1 = \varphi(\gamma_2)$ con corrispondenza biunivoca, allora*

$$\int_{\gamma_1} f(z) = \int_{\gamma_2} f(\varphi(\zeta)) \varphi'(\zeta) d\zeta.$$

ESEMPIO 3.3. Sia $f(z) = \frac{1}{z^n}$, con n in \mathbb{Z} , e sia γ_R il cerchio di centro l'origine e raggio R . Allora f è continua in un intorno di γ_R (dal momento che f non è continua al più solo nell'origine). Parametrizzando γ_R come $\gamma_R(\theta) = R e^{i\theta}$, con θ in $[0, 2\pi]$, si ha

$$\int_{\gamma_R} \frac{1}{z^n} = \int_0^{2\pi} \frac{e^{-in\theta}}{R^{n-1}} i e^{i\theta} d\theta = \begin{cases} 2\pi i & \text{se } n = 1, \\ 0 & \text{se } n \neq 1. \end{cases}$$

Se, oltre ad essere continua, la funzione f è una funzione olomorfa, le due forme differenziali associate sono di classe C^1 , e godono di una proprietà addizionale: essendo $\omega_1 = u dx - v dy$ e $\omega_2 = v dx + u dy$, il fatto che u e v soddisfano le equazioni di Cauchy-Riemann implica immediatamente che sia ω_1 che ω_2 sono forme differenziali chiuse. Ricordando che un dominio E di \mathbb{C} si dice **semplicemente connesso** se ogni curva chiusa contenuta in E è frontiera di un insieme D tutto contenuto in E , e che le forme differenziali chiuse su un dominio semplicemente connesso sono esatte, abbiamo subito il seguente teorema.

TEOREMA 3.4. *Sia E un dominio semplicemente connesso di \mathbb{C} , e sia $f : E \rightarrow \mathbb{C}$ olomorfa. Allora*

$$\int_{\gamma} f(z) = 0,$$

per ogni curva chiusa regolare a tratti contenuta in E .

Se la funzione f , oltre ad essere olomorfa in E , è continua fino alla frontiera di E , e se la frontiera di E è una curva chiusa regolare a tratti, lo stesso risultato continua a valere integrando sul bordo di E .

TEOREMA 3.5. *Sia E un dominio semplicemente connesso di \mathbb{C} , la cui frontiera ∂E è una curva chiusa regolare a tratti, e sia $f : \overline{E} \rightarrow \mathbb{C}$ olomorfa in E e continua su \overline{E} . Allora*

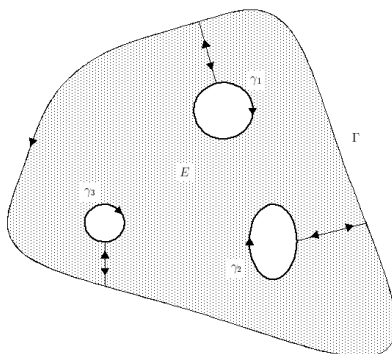
$$\int_{\partial E} f(z) = 0.$$

Per i due risultati precedenti non è necessario dare un orientamento alla curva γ (o alla frontiera di E), perché comunque il risultato non cambia essendo 0. Se il dominio E non è semplicemente connesso, ma la sua frontiera è una curva regolare a tratti (unione di più curve chiuse), il risultato del teorema precedente continua a valere, a patto di percorrere la frontiera in un verso ben definito. Definendo il verso positivo di percorrenza di ∂E come quello tale da “lasciarsi l’insieme sulla sinistra”, si ha allora il seguente teorema.

TEOREMA 3.6. *Sia E un dominio di \mathbb{C} , la cui frontiera ∂E è una curva regolare a tratti, e sia $f : \overline{E} \rightarrow \mathbb{C}$ olomorfa in E e continua su \overline{E} . Allora*

$$\int_{+\partial E} f(z) = 0.$$

Dimostrazione. Sia Γ la curva chiusa che costituisce la frontiera “esterna” di E , e siano $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ le n curve chiuse frontiere degli n “buchi” di E (si veda la figura). È allora possibile costruire a partire da E un insieme semplicemente connesso D collegando gli n buchi a Γ (si veda ancora la figura).



Per il Teorema 3.5, l'integrale di f lungo ∂D è zero. D'altra parte, ogni "lato" aggiunto alla frontiera di E per costruire la frontiera di D viene percorso due volte, in direzioni opposte, e quindi (per la 1) del Teorema 3.2), non dà contributo all'integrale. Ne risulta che

$$\int_{+\partial E} f(z) = 0,$$

perché le curve Γ e $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ sono percorse nel verso "corretto". ■

Ricordiamo il seguente teorema sulle forme differenziali continue definite su domini di \mathbb{R}^2 .

TEOREMA 3.7. *Sia ω una forma differenziale continua definita su E , dominio di \mathbb{R}^2 . Sono equivalenti:*

- i) ω è una forma differenziale esatta;
- ii) se φ è una qualsiasi curva chiusa e regolare a tratti contenuta in E , allora

$$\int_{\varphi} \omega = 0;$$

- iii) Se φ_1 e φ_2 sono due curve regolari a tratti contenute in E tali che $\varphi_1(a) = \varphi_2(a)$ e $\varphi_1(b) = \varphi_2(b)$, allora

$$\int_{\varphi_1} \omega = \int_{\varphi_2} \omega.$$

Se valgono la ii) o la iii) del teorema precedente, si ottiene una primitiva di ω fissando (x_0, y_0) in E e definendo

$$f(x, y) = \int_{\varphi(x, y)} \omega,$$

dove $\varphi(x, y)$ è una qualsiasi curva regolare a tratti contenuta in E e congiungente (x_0, y_0) a (x, y) .

Dal momento che calcolare l'integrale curvilineo di una funzione da \mathbb{C} in \mathbb{C} è equivalente a calcolare l'integrale di due forme differenziali, abbiamo il seguente teorema.

TEOREMA 3.8. *Sia E un dominio in \mathbb{C} , e sia $f : E \rightarrow \mathbb{C}$ una funzione continua tale che*

$$\int_{\gamma} f(z) = 0,$$

per ogni curva γ chiusa e regolare a tratti contenuta in E . Allora esiste $F : E \rightarrow \mathbb{C}$ olomorfa tale che $F'(z) = f(z)$ per ogni z in E . Viceversa, se esiste F olomorfa in E tale che $F'(z) = f(z)$ per ogni z in E , allora

$$\int_{\gamma} f(z) = 0,$$

per ogni curva γ chiusa e regolare a tratti contenuta in E .

La funzione F viene detta **primitiva** di f .

Dimostrazione. Siano ω_1 e ω_2 le forme differenziali continue associate ad f . L'ipotesi su f implica che

$$\int_{\gamma} \omega_1 = \int_{\gamma} \omega_2 = 0,$$

per ogni curva γ chiusa e regolare a tratti contenuta in E . Per il Teorema 3.7, sia ω_1 che ω_2 sono esatte, e pertanto esistono $U : E \rightarrow \mathbb{R}$ e $V : E \rightarrow \mathbb{R}$ di classe C^1 e tali che $dU = \omega_1$ e $dV = \omega_2$. Inoltre,

$$U(x, y) = \int_{\varphi(x, y)} \omega_1, \quad V(x, y) = \int_{\varphi(x, y)} \omega_2,$$

dove $\varphi(x, y)$ è una qualsiasi curva regolare a tratti congiungente un fissato punto (x_0, y_0) di E con (x, y) . Definiamo

$$F(z) = U(x, y) + iV(x, y) = \int_{\varphi(x, y)} [\omega_1 + i\omega_2] = \int_{\varphi(x, y)} f(z),$$

e dimostriamo che F è olomorfa; essendo U e V di classe C^1 su E (per costruzione), affinché F sia olomorfa U e V devono verificare le equazioni di Cauchy-Riemann. Ricordando che, se $f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$, $\omega_1 = u dx - v dy$ e $\omega_2 = v dx + u dy$, si ha $U_x = u$, $U_y = -v$, $V_x = v$ e $V_y = u$, da cui $U_x = V_y$ e $U_y = -V_x$. Pertanto, F è olomorfa. Inoltre,

$$F'(z) = U_x(x, y) + iV_x(x, y) = u(x, y) + i v(x, y) = f(z).$$

Per dimostrare la seconda parte del teorema, supponiamo che esista F olomorfa in E tale che $F'(z) = f(z)$ per ogni z in E . Se $F(z) = U(x, y) + iV(x, y)$, è

facile dimostrare, a partire dalle equazioni di Cauchy-Riemann, che le due forme differenziali ω_1 e ω_2 associate ad f sono esatte. Pertanto, per il Teorema 3.7,

$$\int_{\gamma} f(z) = \int_{\gamma} [\omega_1 + i\omega_2] = 0,$$

e quindi la tesi. ■

OSSERVAZIONE 3.9. Dal teorema precedente segue che una funzione continua definita su E ammette primitive se e solo se il suo integrale su una qualsiasi curva chiusa e regolare a tratti contenuta in E è nullo. È evidente la differenza con il caso delle funzioni continue su \mathbb{R} , che ammettono primitive senza imporre ulteriori condizioni. Tale differenza è dovuta al fatto che le primitive di f non sono solo “derivabili” (come le primitive di una funzione di variabile reale), ma anche olomorfe: devono — ad esempio — valere le equazioni di Cauchy-Riemann.

Mettendo insieme il Teorema 3.4 con il Teorema 3.8 abbiamo che ogni funzione olomorfa ammette primitive.

TEOREMA 3.10. *Sia E un dominio semplicemente connesso di \mathbb{C} , e sia $f : E \rightarrow \mathbb{C}$ una funzione olomorfa. Allora esiste $F : E \rightarrow \mathbb{C}$ olomorfa tale che $F'(z) = f(z)$ per ogni z in E .*

ESEMPIO 3.11. Sia $f(z) = \frac{1}{z}$. La funzione f è olomorfa in $D = \mathbb{C} \setminus \{0\}$, cosicché è ben definito l'integrale di $f(z)$ lungo una qualsiasi curva γ non passante per l'origine. Se E è un dominio semplicemente connesso di \mathbb{C} non contenente l'origine, allora l'integrale di f lungo una qualsiasi curva γ non dipende dalla curva, ma solo dagli estremi. Scegliamo (si noti che è una scelta arbitraria!) $E = \mathbb{C} \setminus S$, dove S è la semiretta $(-\infty, 0]$ contenuta nell'asse reale; in altre parole, “tagliamo” il piano complesso lungo l'asse reale negativo. Così facendo, E è un dominio semplicemente connesso di \mathbb{C} sul quale $f(z)$ è olomorfa. Fissiamo $z_0 = 1$ e definiamo

$$F(z) = \int_{\varphi_z} \frac{1}{z},$$

dove φ_z è il segmento che congiunge z_0 e z (tale curva è tutta contenuta in E). Se z è un numero reale positivo (dunque un punto di E), allora

$$\int_{\varphi_x} \frac{1}{z} = \int_1^x \frac{dt}{t} = \ln(x),$$

e quindi $F(z)$ coincide con $\ln(x)$ su $(0, +\infty)$. Dal momento che $F'(z) = \frac{1}{z}$ (per costruzione), per analogia con il caso reale definiamo

$$\ln(z) = F(z) = \int_{\varphi_z} \frac{1}{z},$$

per ogni z in E .

La scelta (arbitraria) di E non può essere migliorata. Infatti, essendo $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ un connesso, se l'integrale di f lungo una qualsiasi curva chiusa e regolare a tratti contenuta in E fosse zero, allora f avrebbe una primitiva definita su tutto \mathbb{C} privato dell'origine. Dal momento che (si veda l'Esempio 3.3) si ha

$$\int_{\gamma} \frac{1}{z} = 2\pi i,$$

se γ è una qualsiasi circonferenza centrata nell'origine, f non ammette primitive in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Se scriviamo $f(z) = \frac{1}{z}$ come parte reale e come parte immaginaria, si ha

$$u(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad v(x, y) = -\frac{y}{x^2 + y^2},$$

e pertanto le due forme associate a f sono

$$\omega_1(x, y) = \frac{x dx + y dy}{x^2 + y^2}, \quad \omega_2(x, y) = \frac{-y dx + x dy}{x^2 + y^2}.$$

Si vede facilmente che la prima è esatta su $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, e che una sua primitiva è data da $\frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) = \ln(\rho)$, mentre ω_2 non è esatta su $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ dal momento che il suo integrale lungo la circonferenza di centro l'origine e raggio 1 vale 2π . D'altra parte, ω_2 è esatta su E , ovvero su \mathbb{R}^2 privato dell'asse x negativo. È inoltre facile vedere che la funzione θ è una primitiva di ω_2 su tale insieme. Pertanto, se $z = \rho e^{i\theta}$, con $-\pi < \theta < \pi$ allora

$$F(z) = \ln(z) = \ln(\rho) + i\theta,$$

è una possibile definizione di $\ln(z)$; se, invece di considerare \mathbb{C} privato del semiasse negativo, avessimo considerato \mathbb{C} privato di una semiretta del tipo $\arg(z) = \theta_0$, avremmo ottenuto un'altra primitiva di $\frac{1}{z}$, nota a meno di un'altra costante.

4. La formula di Cauchy

Abbiamo già visto in precedenza come le funzioni olomorfe siano abbastanza “particolari”: una funzione olomorfa è più di “una coppia di funzioni differenziabili” (perché devono valere le equazioni di Cauchy-Riemann), ed è più di “una funzione integrabile” (perché il suo integrale lungo una qualsiasi curva chiusa è nullo). Nel prossimo teorema, dovuto a Cauchy, dimostreremo che una funzione olomorfa è “molto” particolare.

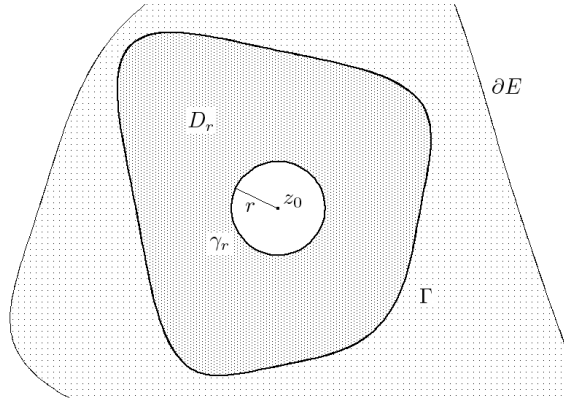
TEOREMA 4.1. *Sia E un dominio semplicemente connesso di \mathbb{C} , e sia $f : E \rightarrow \mathbb{C}$ olomorfa in E . Sia Γ una curva chiusa e regolare a tratti contenuta in E , e sia $D \subset E$*

un aperto tale che $\Gamma = +\partial D$. Sia z_0 in D . Allora si ha

$$(4.1) \quad f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(z)}{z - z_0}.$$

La (4.1) prende il nome di **formula di Cauchy**.

Dimostrazione. Siano Γ , D e z_0 come nell'enunciato, e sia $r > 0$ tale che il cerchio di centro z_0 e raggio r sia tutto contenuto in D (si veda la figura). Definiamo $D_r = D \setminus \overline{B_r(z_0)}$, cosicché D_r è un dominio di \mathbb{C} .



La funzione

$$\varphi(z) = \frac{f(z)}{z - z_0},$$

è olomorfa in D_r (dal momento che z_0 non appartiene a D_r), ed è continua su $\overline{D_r}$ (perché f è continua su D , essendolo su E). Per il Teorema 3.6 si ha allora

$$\int_{+\partial D_r} \varphi(z) = \int_{+\partial D_r} \frac{f(z)}{z - z_0} = 0.$$

Si ha $+\partial D_r = (+\Gamma) \cup (-\gamma_r)$, dove $\gamma_r = +\partial B_r(z_0)$. Pertanto,

$$\int_{\Gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} = \int_{\gamma_r} \frac{f(z)}{z - z_0}.$$

Si noti che l'integrale su γ_r è indipendente da r dal momento che è uguale ad una quantità (l'integrale su Γ di $\varphi(z)$) che non dipende da r . Parametrizzando γ_r come $z_0 + r e^{i\theta}$, con θ in $[0, 2\pi]$, otteniamo

$$\int_{\gamma_r} \frac{f(z)}{z - z_0} = \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + r e^{i\theta})}{r e^{i\theta}} r i e^{i\theta} d\theta = i \int_0^{2\pi} f(z_0 + r e^{i\theta}) d\theta.$$

Se facciamo tendere r a zero, allora $f(z_0 + r e^{i\theta})$ converge uniformemente a $f(z_0)$ (perché f , essendo continua su \overline{D} , è uniformemente continua), e pertanto

$$\int_{\Gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} = \int_{\gamma_r} \frac{f(z)}{z - z_0} = \lim_{r \rightarrow 0^+} \int_{\gamma_r} \frac{f(z)}{z - z_0} = i \int_0^{2\pi} f(z_0) d\theta = 2\pi i f(z_0),$$

da cui segue la tesi. ■

Se E è tale che ∂E è regolare a tratti, e se f è continua su \overline{E} , allora il teorema precedente vale anche prendendo $\Gamma = +\partial E$.

TEOREMA 4.2. *Sia E un dominio semplicemente connesso di \mathbb{C} tale che ∂E sia regolare a tratti, e sia $f : E \rightarrow \mathbb{C}$ olomorfa in E e continua in \overline{E} . Allora per ogni z_0 in E si ha*

$$(4.2) \quad f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{+\partial E} \frac{f(z)}{z - z_0}.$$

OSSERVAZIONE 4.3. Dall'enunciato del Teorema di Cauchy ci si rende immediatamente conto della particolarità di una funzione olomorfa. Il valore di f in un punto z_0 si trova calcolando l'integrale dei valori assunti da f su una curva Γ che “gira” intorno a z_0 , ma che può essere lontanissima da z_0 . In altre parole, c'è un legame molto forte tra i valori assunti da una funzione olomorfa in un dominio ed i valori assunti dalla stessa funzione sulla frontiera del dominio, nel senso che la conoscenza del valore di f sulla frontiera di E dice — automaticamente — quanto deve valere f all'interno di E .

I prossimi risultati mostreranno come dalla formula di Cauchy discendano ulteriori proprietà — molto forti — delle funzioni olomorfe.

TEOREMA 4.4 (Principio di massimo modulo). *Sia E un dominio limitato del piano complesso e sia $f : E \rightarrow \mathbb{C}$ una funzione olomorfa in E e continua in \overline{E} . Allora o $|f(z)|$ è costante in E , oppure*

$$\max_{\overline{E}} |f(z)| = \max_{\partial E} |f(z)|.$$

Dimostrazione. Sia $M = \max_{\overline{E}} |f(z)|$; essendo $|f(z)|$ continua su \overline{E} , che è compatto, tale valore massimo esiste. Definiamo

$$E_1 = \{z \in E : |f(z)| = M\}, \quad E_2 = \{z \in E : |f(z)| < M\}.$$

L'insieme E_2 è evidentemente un aperto, essendo ottenuto come controimmagine di $(-\infty, M)$ tramite la funzione continua $|f(z)|$. Dimostriamo ora che, se E_1 non è vuoto, allora E_1 è un aperto. Sia z_0 in E_1 . Siccome E_1 è contenuto in E , che è

aperto, esiste $r_0 > 0$ tale che $B_r(z_0) \subset E$ per ogni $r \leq r_0$. Sia allora $r \leq r_0$ e sia $\gamma_r = \partial B_r(z_0)$. Per la formula di Cauchy si ha

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{f(z)}{z - z_0}.$$

Passando ai moduli, e ricordando che $|f(z_0)| = M$ e che $|f(z)| \leq M$ per ogni z in γ_r , si ha

$$M = |f(z_0)| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{f(z)}{z - z_0} \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma_r} \frac{|f(z)|}{r} ds_{\gamma_r} \leq \frac{M}{2\pi r} \int_{\gamma_r} ds_{\gamma_r} = M.$$

Pertanto,

$$\frac{1}{2\pi r} \int_{\gamma_r} |f(z)| ds_{\gamma_r} = M,$$

e quindi

$$\int_{\gamma_r} [M - |f(z)|] ds_{\gamma_r} = 0.$$

Siccome $M - |f(z)|$ è una funzione continua e non negativa, deve necessariamente essere $|f(z)| = M$ per ogni z in γ_r . Facendo variare r tra 0 e r_0 , si trova che $|f(z)| = M$ per ogni z in γ_r , per ogni $r \leq r_0$; pertanto, $|f(z)| = M$ per ogni z in $B_{r_0}(z_0)$, da cui segue che $B_{r_0}(z_0) \subset E_1$. In definitiva, se E_1 è non vuoto, E_1 è aperto.

Dal momento che $E = E_1 \cup E_2$, e l'unione è disgiunta, essendo E connesso uno tra E_1 ed E_2 deve essere vuoto. Se E_1 è vuoto, allora $E_2 = E$ e quindi $|f(z)| < M$ per ogni z in E : M è allora assunto sulla frontiera. Se, invece, E_2 è vuoto, allora $E_1 = E$ e quindi $|f(z)| = M$ è costante su tutto E . ■

OSSERVAZIONE 4.5. Se $|f(z)|$ è costante in E , allora è costante anche l'argomento di f , come si deduce dalle (2.6). In altre parole, se f è una funzione olomorfa costante in modulo, allora f è costante. Inoltre, in entrambi i casi previsti dal precedente teorema, si ha

$$\max_{\overline{E}} |f(z)| = \max_{\partial E} |f(z)|.$$

Prima di enunciare la seconda conseguenza della formula di Cauchy, ricordiamo come si comportano rispetto a continuità e derivabilità gli integrali dipendenti da un parametro.

TEOREMA 4.6. Sia $\varphi : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ una funzione tale che:

- 1) $\varphi(\cdot, \zeta)$ è olomorfa in \mathbb{C} per ogni ζ in \mathbb{C} ;
- 2) $\varphi(z, \zeta)$ è continua in $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$;
- 3) $\varphi_z(z, \zeta)$ è continua in $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$.

Sia γ una curva regolare a tratti e sia

$$F(z) = \int_{\gamma} \varphi(z, \zeta) .$$

Allora F è olomorfa in \mathbb{C} e si ha

$$F'(z) = \int_{\gamma} \varphi_z(z, \zeta) .$$

Dimostrazione. Sia $\varphi(z, \zeta) = u(x, y, \xi, \eta) + i v(x, y, \xi, \eta)$, e siano $\omega_1(\xi, \eta)$ e $\omega_2(\xi, \eta)$ le due forme differenziali continue associate a $\varphi(z, \cdot)$:

$$\omega_1(\xi, \eta) = u(x, y, \xi, \eta) d\xi - v(x, y, \xi, \eta) d\eta ,$$

$$\omega_2(\xi, \eta) = v(x, y, \xi, \eta) d\xi + u(x, y, \xi, \eta) d\eta .$$

Allora $F(z) = U(x, y) + i V(x, y)$ dove

$$U(x, y) = \int_{\gamma} \omega_1 = \int_{\gamma} [u(x, y, \xi, \eta) d\xi - v(x, y, \xi, \eta) d\eta] ,$$

e

$$V(x, y) = \int_{\gamma} \omega_2 = \int_{\gamma} [v(x, y, \xi, \eta) d\xi + u(x, y, \xi, \eta) d\eta] .$$

Siccome $u(\cdot, \cdot, \xi, \eta)$ e $v(\cdot, \cdot, \xi, \eta)$ sono funzioni $C^1(\mathbb{R}^2)$, è possibile derivare U e V , ottenendo

$$U_x(x, y) = \int_{\gamma} [u_x(x, y, \xi, \eta) d\xi - v_x(x, y, \xi, \eta) d\eta] ,$$

$$U_y(x, y) = \int_{\gamma} [u_y(x, y, \xi, \eta) d\xi - v_y(x, y, \xi, \eta) d\eta] ,$$

e

$$V_x(x, y) = \int_{\gamma} [v_x(x, y, \xi, \eta) d\xi + u_x(x, y, \xi, \eta) d\eta] ,$$

$$V_y(x, y) = \int_{\gamma} [v_y(x, y, \xi, \eta) d\xi + u_y(x, y, \xi, \eta) d\eta] .$$

Ricordando che $u_x(x, y, \xi, \eta) = v_y(x, y, \xi, \eta)$ e $u_y(x, y, \xi, \eta) = -v_x(x, y, \xi, \eta)$, si ottiene facilmente che $U_x(x, y) = V_y(x, y)$ e che $U_y(x, y) = -V_x(x, y)$. Pertanto, U e V sono $C^1(\mathbb{R}^2)$ e soddisfano le equazioni di Cauchy-Riemann, il che implica che F è olomorfa. Inoltre, essendo

$$\varphi_z(z, \zeta) = u_x(x, y, \xi, \eta) + i v_x(x, y, \xi, \eta) ,$$

le forme differenziali associate a φ_z sono $\tilde{\omega}_1 = u_x d\xi - v_x d\eta$ e $\tilde{\omega}_2 = v_x d\xi + u_x d\eta$, e quindi si ha

$$U_x(x, y) = \int_{\gamma} \tilde{\omega}_1 , \quad V_x(x, y) = \int_{\gamma} \tilde{\omega}_2 ,$$

da cui segue

$$F'(z) = U_x(x, y) + i V_x(x, y) = \int_{\gamma} [\tilde{\omega}_1 + i \tilde{\omega}_2] = \int_{\gamma} \varphi_z(z, \zeta),$$

come volevasi dimostrare. ■

OSSERVAZIONE 4.7. Si noti che per dimostrare il teorema precedente non si è usato mai il fatto che φ fosse continua e olomorfa su $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$; è infatti sufficiente che $\varphi(z, \zeta)$ sia continua in $E \times \gamma$, con E un dominio del piano complesso, che $\varphi(z, \zeta)$ sia olomorfa in E per ζ in γ , e che $\varphi_z(z, \zeta)$ sia continua in E per ζ in γ .

Una volta dimostrato che si può derivare sotto il segno di integrale, ed ottenere una funzione olomorfa, possiamo dimostrare che le funzioni olomorfe ammettono derivate di ogni ordine.

TEOREMA 4.8. *Sia E un dominio del piano complesso la cui frontiera ∂E sia una curva regolare a tratti, e sia $f : E \rightarrow \mathbb{C}$ olomorfa in E e continua in \overline{E} . Allora per ogni k in \mathbb{N} esiste la derivata k -sima di f in E , e si ha per ogni z_0 in E*

$$(4.3) \quad f^{(k)}(z_0) = \frac{k!}{2\pi i} \int_{+\partial E} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}}.$$

Inoltre, $f^{(k)}$ è una funzione olomorfa per ogni k .

Dimostrazione. Sia z_0 in E ; allora, essendo E aperto, esiste $\delta > 0$ tale che $B_\delta(z_0) \subset E$. Consideriamo, per z in ∂E e w in $B_\delta(z_0)$, la funzione

$$\varphi(w, z) = \frac{1}{2\pi i} \frac{f(z)}{z - w}.$$

Essendo φ continua rispetto a z e olomorfa rispetto a w , ed inoltre tale che

$$\varphi_w(w, z) = \frac{1}{2\pi i} \frac{f(z)}{(z - w)^2},$$

è continua in w e z , possiamo applicare il Teorema 4.6 (o meglio, l'Osservazione 4.7) e ottenere che, detta

$$F(w) = \int_{+\partial E} \varphi(w, z),$$

si ha che $F(w)$ è olomorfa e che

$$F'(w) = \int_{+\partial E} \varphi_w(w, z).$$

Per la formula di Cauchy, $F(w)$ non è altro che $f(w)$, e pertanto f è olomorfa (non una grande scoperta) e si ha

$$f'(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{+\partial E} \frac{f(z)}{(z-w)^2}.$$

In particolare, per ogni z_0 in E si ha

$$f'(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{+\partial E} \frac{f(z)}{(z-z_0)^2}.$$

Se ora definiamo

$$\varphi(w, z) = \frac{1}{2\pi i} \frac{f(z)}{(z-w)^2},$$

ci rendiamo subito conto che lo stesso ragionamento svolto in precedenza si può ripetere; in altre parole, $f'(w)$ è *olomorfa* e si ha, per ogni z_0 in E ,

$$f''(z_0) = \frac{2}{2\pi i} \int_{+\partial E} \frac{f(z)}{(z-z_0)^3}.$$

Iterando il ragionamento k volte si trova la (4.3). ■

OSSERVAZIONE 4.9. Se ce ne fosse ancora bisogno, il teorema precedente motiva una volta di più la profonda differenza che passa tra le funzioni C^1 in \mathbb{R} e le funzioni olomorfe: è sufficiente che la funzione abbia la derivata prima continua, per avere automaticamente che la funzione è derivabile infinite volte. Inoltre, ognuna delle derivate successive alla prima si può rappresentare come integrale dei valori della funzione f sulla frontiera del dominio su cui f è olomorfa.

Dal teorema precedente discendono altri risultati importanti sulle funzioni olomorfe.

TEOREMA 4.10 (Morera). *Sia E un dominio semplicemente connesso del piano complesso, e sia $f : E \rightarrow \mathbb{C}$ continua in E e tale che*

$$\int_{\gamma} f(z) = 0,$$

per ogni curva γ chiusa e regolare a tratti contenuta in E . Allora f è olomorfa.

Dimostrazione. Se f è come nelle ipotesi del teorema, allora esiste una primitiva F di f , con F olomorfa (Teorema 3.8). Pertanto, $f(z) = F'(z)$ è olomorfa come derivata di una funzione olomorfa. ■

OSSERVAZIONE 4.11. In base al teorema precedente, una funzione continua ammette primitive in \mathbb{C} se e solo se è olomorfa; il che vuol dire che per avere primitive bisogna essere “almeno” C^∞ . Ancora una volta, una differenza marcata con il caso reale.

TEOREMA 4.12 (Liouville). Sia $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ olomorfa, e supponiamo esista $M \geq 0$ tale che $|f(z)| \leq M$ per ogni z in \mathbb{C} . Allora f è costante.

Dimostrazione. Per (4.3) si ha

$$f'(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_R} \frac{f(z)}{(z - z_0)^2},$$

dove γ_R è la circonferenza di centro z_0 e raggio R . Pertanto,

$$|f'(z_0)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma_R} \frac{|f(z)|}{R^2} ds_{\gamma_R} \leq \frac{M}{2\pi R^2} \int_{\gamma_R} ds_{\gamma_R} = \frac{M}{R}.$$

Dal momento che la formula precedente è valida per ogni $R > 0$, facendo tendere R ad infinito si trova $f'(z_0) = 0$. Essendo z_0 generico, si ottiene $f'(z) \equiv 0$ in \mathbb{C} , e quindi f costante. ■

OSSERVAZIONE 4.13. Se, invece di essere limitato, $|f(z)|$ cresce al più in maniera polinomiale, ovvero se esiste k in \mathbb{N} e $M > 0$ tale che $|f(z)| \leq M(1 + |z|)^k$, allora f è un polinomio di grado al più k . Per dimostrare questo fatto, è sufficiente applicare (4.3) per $k + 1$, ottenendo $f^{(k+1)}(z) \equiv 0$.

OSSERVAZIONE 4.14. Essendo $\cos(z)$ e $\sin(z)$ olomorfe su \mathbb{C} e non costanti, esistono punti z del piano complesso per i quali $|\cos(z)| > 1$ (o $|\sin(z)| > 1$).

TEOREMA 4.15 (Teorema fondamentale dell'algebra). Sia P un polinomio di grado $n \geq 1$. Allora esiste z_0 in \mathbb{C} tale che $P(z_0) = 0$.

Dimostrazione. Sia

$$P(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k = a_n z^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k z^k,$$

con $a_n \neq 0$. Allora

$$|P(z)| = \left| a_n z^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k z^k \right| \geq |a_n| |z|^n - \sum_{k=0}^{n-1} |a_k| |z|^k = g(|z|).$$

La funzione g è un polinomio di grado n in $|z|$, ed ha il coefficiente del termine di grado massimo positivo. Pertanto,

$$\lim_{|z| \rightarrow +\infty} g(|z|) = \lim_{|z| \rightarrow +\infty} |P(z)| = +\infty.$$

Esiste allora $R_1 > 0$ tale che $|P(z)| \geq 1$ per ogni z tale che $|z| > R_1$.

Supponiamo ora per assurdo che $P(z) \neq 0$ per ogni z in \mathbb{C} . È allora olomorfa in \mathbb{C} la funzione $\varphi(z) = \frac{1}{P(z)}$. Se $|z| > R_1$, essendo $|P(z)| \geq 1$, si ha $|\varphi(z)| \leq 1$. Inoltre, essendo φ continua e $\overline{B_{R_1}(0)}$ compatto, esiste $M \geq 0$ tale che $|\varphi(z)| \leq M$ per ogni z tale che $|z| \leq R_1$. In definitiva, esiste $M' \geq 0$ ($M' = \max(1, M)$) tale che $|\varphi(z)| \leq M'$ su \mathbb{C} . Per il teorema di Liouville, φ è costante. Ma se φ è costante, anche $P(z)$ è costante, il che non può essere essendo P un polinomio di grado maggiore di 1.

■